جلسه هجدهم

شنبه، ۱۵ آذر ۱۴۰۴

(ادامه مبحث) سری های فوریه

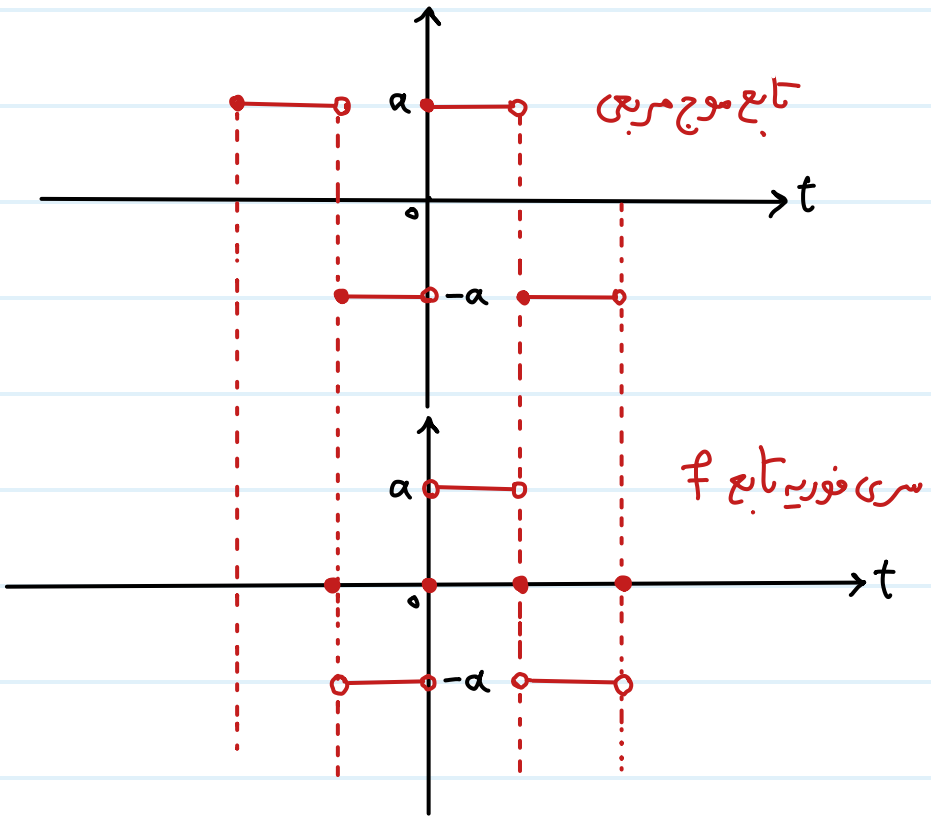
* قضیه (همگرایی سری های فوریه): اگر تابع $f(t)$ در نقطه t_0 پیوسته باشد آنگاه:

$$f(t_0) = \left(\text{مقدار سری فوریه تابع } f(t) \text{ در نقطه } t_0\right)$$

اما اگر $f(t)$ در نقطه t_0 دارای ناپیوستگی جهشی باشد آنگاه: «مقدار سری فوریه تابع $f(t)$ در نقطه t_0 به نقطه میانی جهش تابع $f(t)$ در نقطه t_0 همگرا می‌شود؛ یعنی به $\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$.»

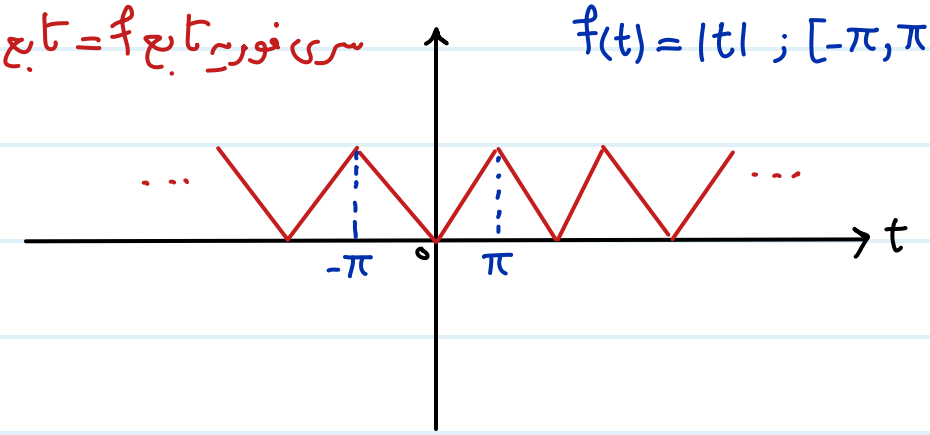
$$f(t_0^{\pm}) = \lim_{t \to t_0^{\pm}} f(t)$$

مثال ۱ (موج مربعی):

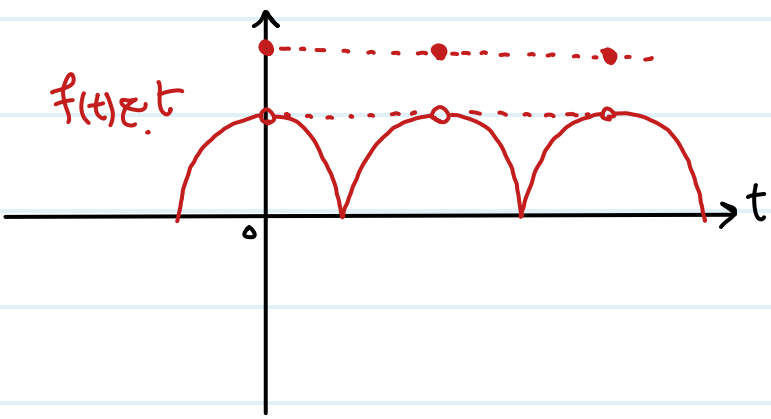


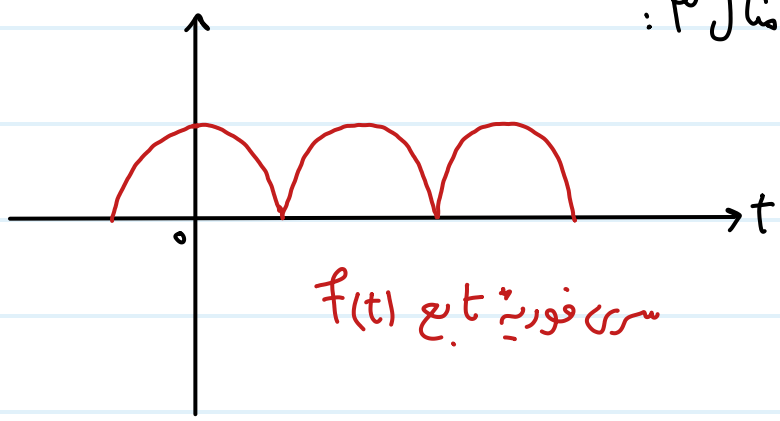
مثال ۲ (موج مثلثی) : $f(t)=|t| \; ; \; [-\pi,\pi]$

سری فوریه تابع f = تابع موج مثلثی



مثال ۳ :

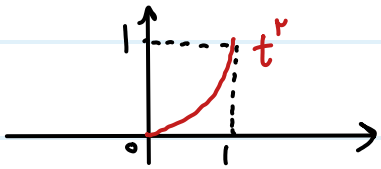




* سری فوریه توابع غیرتناوبی (روی بازه با طول متناهی) :

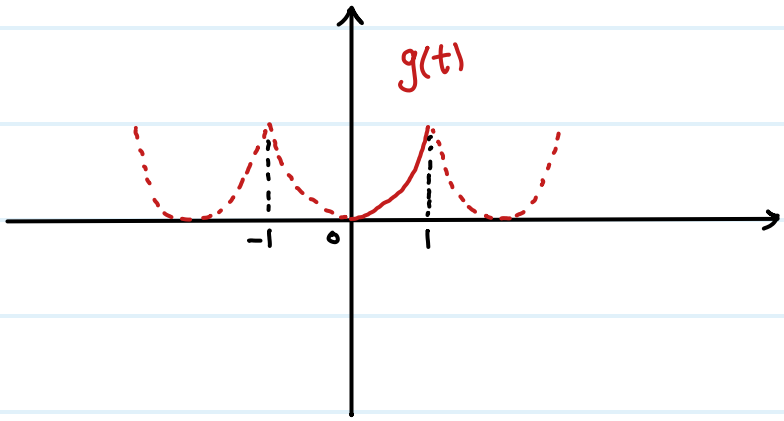
* نکته : از ابزار سری های فوریه می توان برای مطالعه رفتار توابع غیرتناوبی نیز استفاده کرد. در واقع اگر بازه ای که قصد داریم رفتار تابع را روی آن مطالعه کنیم بازه ای با طول متناهی مثل $[0,L]$ باشد آنگاه با استفاده از بسط تناوبی زوج / فرد تابع، می توانیم از ابزار سری های فوریه برای مطالعه رفتار تابع روی بازه $[0,L]$ استفاده کنیم.

مثال (بسط تناوبی یک تابع) : تابع $f(t)=t^2$ را در نظر بگیرید. به وضوح $f(t)$ تابعی غیرتناوبی است. فرض کنید می خواهیم رفتار این تابع را روی بازهٔ $[0,1]$ بررسی کنیم.



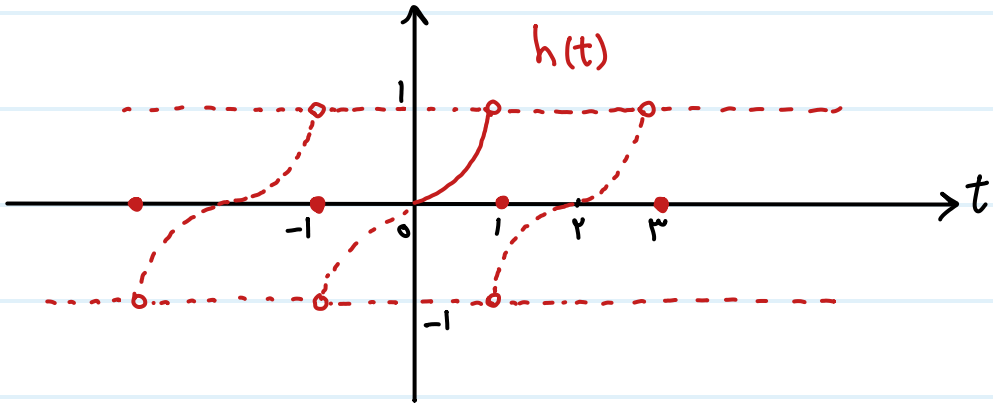
برای استفاده از ابزار سری های فوریه، می‌توانیم از بسط تناوبی زوج یا بسط تناوبی فرد تابع کمک بگیریم.

بسط تناوبی زوج تابع $f(t)=t^2$:



$g(t)$ تابعی تناوبی روی $[-1,1]$ با دورهٔ تناوب $T=2$ و $g\big|_{[0,1]}(t)=f(t)$. اگر $S(t)$ سری فوریه تابع تناوبی زوج $g(t)$ باشد آنگاه $S\big|_{[0,1]}$ سری فوریه تابع $f(t)=t^2$ روی بازه $[0,1]$ است.

بسط تناوبی فرد تابع $f(t)=t^2$:



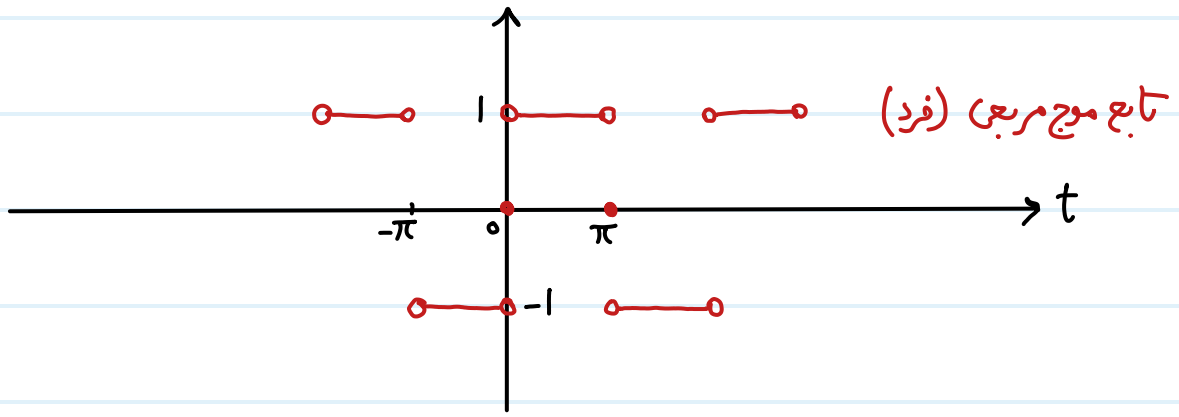
$h(t)$ تابعی تناوبی روی $[-1,1]$ با دوره تناوب $T=2$ است و $h\big|_{[0,1)}(t)=f(t)$. در این صورت تحدید سری فوریه تابع $h(t)$ به بازهٔ $[0,1)$ عبارتست از سری فوریه تابع $f(t)=t^2$ روی $[0,1)$.

* کاربرد هایی از سری های فوریه

مثال (کاربرد در یافتن جواب خاص یک ODE) : تابع موج مربعی (فرد)

$$f(t)=\begin{cases}+1 & ; t\in(0,\pi)\\ 0 & ; t=0,\pi\end{cases}$$

را روی بازهٔ $[0,\pi]$ با دوره تناوب $T=2\pi$ در نظر گیرید:



در این صورت با استفاده از سری های فوریه می توان برای ODE زیر جوابی پیدا کرد:

$$\ddot{x}+ax=f(t) \quad ; \quad (a\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}) \qquad (1)$$

راه حل: دیدیم سری فوریه تابع موج مربعی به صورت زیر است:

$$\forall t\in(0,\pi) \qquad f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{\sin(5t)}{5}+\dots\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\text{ های}\\ \text{طبیعی فرد}}}\frac{\sin(nt)}{n}$$

لذا معادله (1) را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\ddot{x}+ax=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{\sin(5t)}{5}+\dots\right) \qquad (2)$$

برای هر عدد طبیعی و فرد مثل n و با در نظر گرفتن معادله (2)، معادلات دیفرانسیل زیر را تعریف می کنیم:

$$\ddot{x}_n+ax_n=\frac{\sin(nt)}{n} \qquad (3)$$

که در این صورت یک جواب معادله (3)، با استفاده از فرمول جایگزینی مختلط و فرمول پاسخ نمایی، به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\forall_{\substack{n\\ \text{طبیعی فرد}}} \qquad x_{n;p} = \frac{\sin(nt)}{n(a-n^2)}}$$

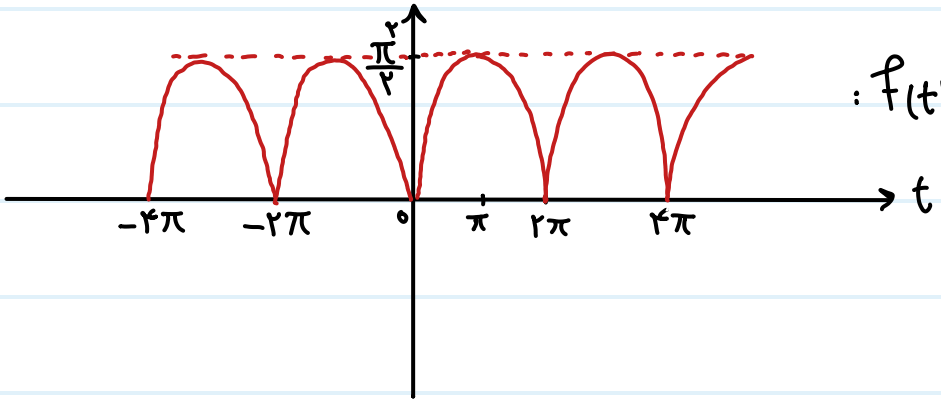
حال با بکارگیری اصل سوپرپوزیشن برای معادلهٔ (۲)، جوابی خاص از معادله (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x_p(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\text{ های}\\ \text{طبیعی فرد}}} x_{n;p}(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\text{ های}\\ \text{طبیعی فرد}}} \frac{\sin(nt)}{n(a-n^2)}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{a-1} + \frac{\sin(3t)}{3(a-9)} + \frac{\sin(5t)}{5(a-25)} + \cdots\right)$$

مثال (کاربرد سری های فوریه در محاسبه مقدار سری های همگرا):

تابع تناوبی $f(t) = t\left(\pi - \frac{t}{2}\right)$ را روی $[0, 2\pi]$ با دوره تناوب $T = 2\pi$ در نظر گیرید:



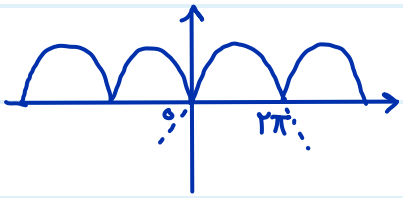
سری فوریه (بسط تناوبی زوج) تابع $f(t)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\left(\pi - \frac{t}{2}\right) dt = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\left(\pi - \frac{t}{2}\right)\cos(nt)\, dt \underset{\text{(انتگرال گیری جزء به جزء)}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\cancelto{0}{\frac{\pi t \sin(nt)}{n}} + \frac{\pi\cos(nt)}{n^2} - \cancelto{0}{\frac{t^2\sin(nt)}{2n}} - \frac{t\cos(nt)}{n^2} + \cancelto{0}{\frac{\sin(nt)}{n^3}}\right)\Bigg|_{t=0}^{2\pi}$$

$$= -\frac{2}{n^2}$$

<u>تابعی فرد داریم</u> $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = 0$ / $\therefore$ درنتیجه سری فوریه بسط تناوبی زوج تابع $f(t)$ عبارتست از :



$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

اگر $t := 0 \Rightarrow f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

اگر $t := \pi \Rightarrow f(\pi) = \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ $\quad (-1)^n = \cos(nt)$

اگر $\cancel{t = -\pi} \Rightarrow f(-\pi) = -\frac{3\pi^2}{2} \neq \frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \neq \frac{11\pi^2}{12}$ $\quad [0, 2\pi]$